Differentialgleichungen

Überblick Lösungsmethoden - Franz Ludwig Kostelezky
Vielen Dank an Jonas Bilal für Korrekturen.

Homogene Differentialgleichung – Lösungsverfahren

$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = 0 \quad für\ a, b \in \mathbb{R}$

1) Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ einsetzen
   Charakteristisches Polynom nach λ_1, λ_2 auflösen:
   $$y(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$
2) a) $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \lambda_1 \neq \lambda_2$
   $$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = e^{\lambda_2 t}$$
   b) $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$
   $$\Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 t}, y_2 = te^{\lambda_2 t}$$
   c) $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \bar{\lambda}_2$
   $\lambda_2 = \alpha - i\beta$
   $$\Rightarrow y_1 = e^{\alpha t} cos(\beta t), y_2 = e^{\alpha t} sin(\beta t)$$
3) $y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$
4) Mit Hilfe der Anfangsbedingungen $y(t_0), \dot{y}(t_1)$ … kann ein lineares Gleichungssystem aufgestellt werden, aus dem man die C_i bestimmen kann.

Variation der Konstanten

$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = f(t) \quad (1)$

1) Homogene Lösung bestimmen
   $f(t) = 0$
2) Konstanten variieren
   $y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$
   $\dot{y}(t) = \cancel{\dot{C}_1 y_1} + C_1\dot{y}_1 + \cancel{\dot{C}_2 y_2} + C_{2\dot{y}_2}$
   $\ddot{y}(t) = \cancel{\dot{C}_1 \dot{y}_1} + C_1\ddot{y}_1 + \cancel{\dot{C}_2 \dot{y}_2} + C_2\ddot{y}_2$
   …
   $$y_p{}^{(n)} = \sum_i C_i(t) y_i^{(n)}(t) + \underbrace{\sum_i \dot{C}_i(t) y_i^{(n-1)}(t)}_{=f(t)}$$
3) Gleichungen, die sich aus Anfangswertproblemen ergeben in *(1)* einsetzen:
   - Als Matrix schreiben
   - Nach C_i auflösen → Integrieren

Fourier-Reihe

Jede stückweise stetige und im Intervall $\left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2}\right]$ quadratintegrable Funktion $f(x)$ ist durch eine Fourier-Reihe darstellbar:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \, e^{ik_n x}$$

Mit $k_n = \frac{2\pi n}{L}$

Mit der Orthogonalität folgt (für) die Fourier-Reihe:

$$f_m = \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_m x} f(x) dx = \frac{1}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{-L/2}^{L/2} e^{-ik_m x} e^{ik_n x} \, dx$$

Zur Quadratintegrabilität

Für quadratintegrable Funktionen gilt:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

Fourier-Transformation

Herleitung: DGL Skript S. 32

$$\mathcal{F}\{f(x)\}(k) = F(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} f(x)dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\}(x) = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} F(k)dk$$

Beispiel (17): Rechteck

$$f(t) = \begin{cases} 1: 0 \leq |t| < 1 \\ 1/2: |t| = 1 \\ 0: |t| > 0 \end{cases}$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(t)dt = 2\int_{0}^{1} f(t)cos(\omega t)dt = \frac{sin(\omega)}{\omega}$$

Operatormethode

Definitionen

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv D[y(t)] \;\Rightarrow\; D := \frac{d}{dt}$$

$$D^{-1}[y(t)] = \int y(t)dt$$

r-faches Hintereinander-Ausführen von D: D^r

Für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung gilt:

$$y_p(t) = e^{\lambda_2 t} * D^{-1}\left[e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} D^{-1}\left[e^{-\lambda_1 t} g(t)\right]\right]$$

Allgemein:

$$y_p(t) = e^{\lambda_s t} * D^{-r_s}\left[e^{(\lambda_{s-1}-\lambda_s)t} D^{-r_s-1}\left[\dots e^{(\lambda_1-\lambda_2)t} D^{-r_1}\left[e^{-\lambda_1 t} g(t)\right]\dots\right]\right]$$

Lösung mit der Operatormethode

$$\dot{y}(t) - \lambda y(t) = g(t)$$

$$\Rightarrow (D-\lambda)y(t) = g(t)$$

Produktansatz: $y(t) = e^{\lambda t}$ (mit Exponentialansatz)

$$\Rightarrow y(t) = e^{\lambda t} * D^{-1}\left[e^{-\lambda t} g(t)\right]$$

… Auflösung nach λ etc.

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung gilt:

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)}(t) = f(t)$$

Laplace-Transformation

$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)+2y(t)\}(s)=\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}+\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}+2\underbrace{\mathcal{L}\{y(t)\}}_{Y(s)}=\underbrace{\mathcal{L}\{g(t)\}}_{G(s)}$

$$\mathcal{L}\{\dot{y}(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\dot{y}(t)dt=\int_0^\infty \tfrac{d}{dt}\big(e^{-st}y(t)\big)dt-\int_0^\infty y(t)\big(\tfrac{d}{dt}e^{-st}\big)dt$$

$$=[e^{-st}y(t)]_0^\infty-\int_0^\infty y(t)(-s)e^{-st}dt$$

$$=s\int_0^\infty y(t)e^{-st}dt-y(0)=sY(s)-y(0)$$

$$\mathcal{L}\{\ddot{y}(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}\ddot{y}(t)dt=\int_0^\infty \tfrac{d}{dt}\big(e^{-st}\dot{y}(t)\big)dt-\int_0^\infty \dot{y}(t)\big(\tfrac{d}{dt}e^{-st}\big)dt$$

$$=-\dot{y}(0)+s\int_0^\infty \dot{y}(t)e^{-st}dt=-\dot{y}(0)+s*sY(s)-y(0)*s$$

$$=s^2Y(s)-s*\underbrace{y(0)-\dot{y}(0)}_{Anfangsbedingungen}$$

Allgemein ausgedrückt:

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}=s^nY(s)-s^{(n-1)}y(0)-s^{(n-2)}\dot{y}(0)-\cdots-y^{(n-1)}(0)$$

In der praktischen Anwendung der Laplace-Transformation sind Look-Up-Tables und Partialbruchzerlegung notwendig.

Allgemeine Eigenschaften

Vgl. Wikipedia

Allgemeine Eigenschaft bzw. Operation	Originalfunktion $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bildfunktion $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$
Linearität	$a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s)+a_2 F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a>0)$
Verschiebung im Originalbereich	$f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
Verschiebung im Bildbereich (Dämpfungssatz)	$e^{-at}\cdot f(t)$	$F(s+a) \quad (a\in\mathbb{C})$
Faltung im Originalbereich Multiplikation im Bildbereich	$\int_0^t f(u)\,g(t-u)\,\mathrm{d}u$	$F(s)\,G(s)$
Multiplikation im Originalbereich Faltung im Bildbereich	$f(t)\,g(t)$	$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(\sigma)\,G(s-\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ konvergiert für $Re(s-\sigma)>\sigma_G$ wobei σ_G größer als der Pol von G mit dem größten Realteil ist.

Ordnung einer Differentialgleichung verringern

Anhand eines Beispiels, vgl. studyflix.de

Gegeben ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$3y^{(4)} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = sin(x)$$

Zuerst führen wir neue Variablen ein. Bei einer Differentialgleichung vierter Ordnung benötigen wir vier neue Variablen, auch wenn – wie in diesem Fall – die dritte Ableitung nicht vorkommt:

$$y_1 = y$$

$$y_2 = \dot{y}$$

$$y_3 = \ddot{y}$$

$$y_4 = \dddot{y}$$

Es ergibt sich folgende Gleichung:

$$3\dot{y}_4 + 2y_3 + y_2 + 4y_1 = sin(x)$$

Diese lösen wir nach $\dot{y}_4$ auf:

$$\dot{y}_4 = -\frac{2}{3}y_3 - \frac{1}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_1 + sin(x)$$

Das Differentialgleichungssystem in Matrix-Schreibweise ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ sin(x) \end{pmatrix}$$